

Smykové tření v matematických modelech mechanických systémů

Vojtěch Klouček¹

¹ VÚTS, a.s., Svárovská 619, Liberec XI – Růžodol I, 460 01 Liberec, vojtech.kloucek@vuts.cz

Grant: LO1213

Název grantu: Excelentní Strojírenský Výzkum

Oborové zaměření: JQ Strojní zařízení a nástroje

© GRANT Journal, MAGNANIMITAS Assn.

Abstrakt Smykové tření i ostatní typy pasivních odporů se v technické praxi vyskytuje téměř všude. Obecně lze říci, že kontakt dvou nebo více hmotných těles bez tření neexistuje. Přes zdánlivou jednoduchost tohoto jevu je fyzikální podstata tření velmi složitá. Bylo publikováno mnoho prací, které tento jev zkoumají velmi podrobně. V technických aplikacích může být tření žádoucí (např. šroubové spoje, tření mezi pneumatikou vozidla a vozovkou, brzdy) i nežádoucí (ložiska, tření pístu spalovacího motoru ve válci). V obou případech inženýrská praxe vyžaduje pokud možno jednoduchý a snadno použitelný matematický model pro popis třecích sil. Tento článek diskutuje některé možnosti modelování tření v numerických výpočtech a porovnání výsledků získaných řešením pohybových rovnic v prostředí Maple a výsledků simulace v prostředí ADAMS.

Klíčová slova smykové tření, simulace, matematický model, tribologie

1. POPIS ŘEŠENÉHO PROBLÉMU

Tuhá přímá tyč hmotnosti m a čtvercového průřezu o straně h je podepřena dvěma obecnými vazbami tak, že jí zbývá jeden stupeň volnosti ve vodorovném směru. Pevný souřadnicový systém má počátek v polovině spojnice obou vazeb, směr osy x je totožný se směrem pohybu tyče. Síla F působící v ose tyče má konstantní velikost (obr.1). Ve vazbách je uvažováno suché tření, obecně v každé vazbě jiné.

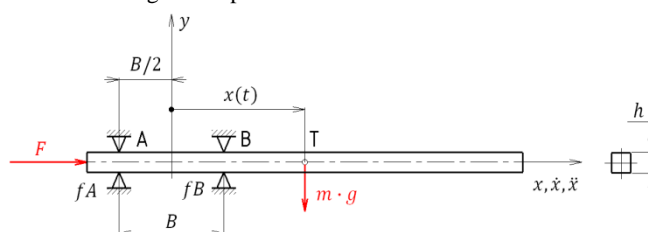
Cílem je vytvoření modelu suchého tření, který bude shodný s modelem implementovaným v multibody systému pro dynamické simulace soustav těles Adams. Výpočet průběhu pohybu se zvolenými počátečními podmínkami bude pak proveden dvojím způsobem, a to:

- sestavením pohybové rovnice a jejím numerickým řešením v prostředí Maple
- vytvořením odpovídajícího modelu a simulací v prostředí Adams

Výsledky získané s různými parametry výpočtu pak budou porovnány a přehledně zobrazeny ve společných grafech.

Technologie tváření za studena je v průmyslové praxi velmi rozšířená pro svoji relativní technologickou jednoduchost, vysokou produktivitu a vysokou přesnost výroby. Pro konstrukci tvářecího nástroje, a obecně pro vhodnou volbu nebo návrh tvářecího stroje, je

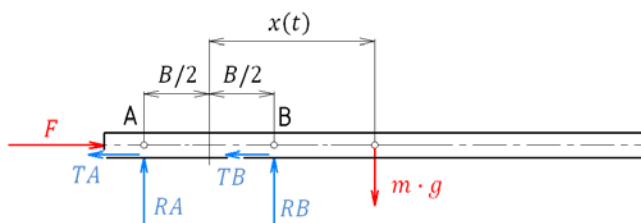
nezbytná přesná znalost tvářecích sil a výkonů potřebných pro danou technologickou operaci.



Obr.1: Uložení tyče

2. POHYBOVÁ ROVNICE

Pro sestavení pohybové rovnice je nutno nejprve uvolnit tyč místech uložení a vazby nahradit reakčními silami (viz. obr.2).



Obr.2: Uvolnění vazeb

Rovnice rovnováhy uvolněné tyče:

$$\rightarrow: F - TA - TB = m \cdot \ddot{x}(t)$$

$$\uparrow: RA + RB - m \cdot g = 0$$

$$T: TA \cdot \frac{h}{2} \cdot \text{sgn}(RA) + TB \cdot \frac{h}{2} \cdot \text{sgn}(RB) + RA \cdot \left[x(t) + \frac{B}{2} \right] + RB \cdot \left[x(t) - \frac{B}{2} \right] = 0$$

Velikosti a smysly třecích sil jsou dány vztahy

$$TA = |RA| \cdot fA(\dot{x})$$

$$TB = |RB| \cdot fB(\dot{x})$$

Dosazením do momentové rovnice rovnováhy a s přihlédnutím k tomu, že

$$|x| \cdot \text{sgn}(x) = x,$$

dostaneme

$$RA \cdot \frac{h}{2} \cdot fA(\dot{x}) + RB \cdot \frac{h}{2} \cdot fB(\dot{x}) + RA \cdot \left[x(t) + \frac{B}{2} \right] + RB \cdot \left[x(t) - \frac{B}{2} \right] = 0$$

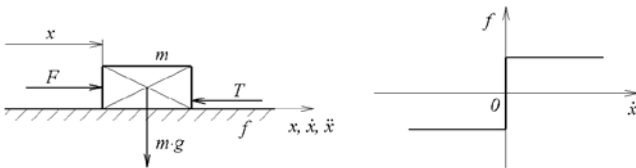
a vytknutím před závorky

$$RA \cdot \left[\frac{h}{2} \cdot fA(\dot{x}) + x(t) + \frac{B}{2} \right] + RB \cdot \left[\frac{h}{2} \cdot fB(\dot{x}) + x(t) - \frac{B}{2} \right] = 0.$$

Klíčový význam pro matematický model pohybu tyče má průběh závislosti koeficientu tření na relativní rychlosti tyče vůči vazbám $fA(\dot{x})$ a $fB(\dot{x})$.

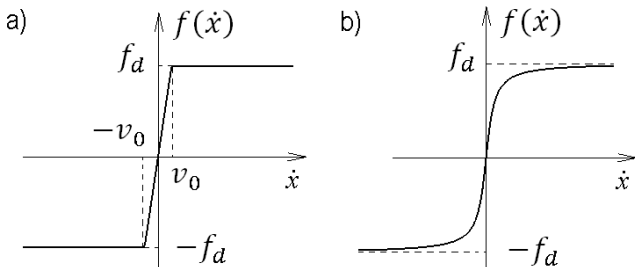
3. SUCHÉ TŘENÍ

Při vzájemném kontaktu těles na sebe tato tělesa působí silami stejné velikosti a směru, opačného smyslu (zákon akce a reakce). Tyto síly lze rozložit do dvou složek - ve směru normály styčné plochy (reakce ideální vazby) a ve směru tečny ke styčné ploše (třecí síla). Nejjednodušší model smykového tření je znázorněn na obr.3.



Obr.3: Model smykového tření

Pokud je břemeno o hmotnosti m vůči podložce v klidu ($\dot{x} = 0$), je třecí síla $T = F$. Zároveň musí být splněna podmínka $T \leq m \cdot g \cdot f$. Pokud se břemeno pohybuje ($\dot{x} \neq 0$), je $T = m \cdot g \cdot f$. To znamená, že za klidu může velikost třecí síly nabývat nekonečně mnoha hodnot. Tento model tření je vhodný v případech, kdy je předem známo, že tělesa jsou vůči sobě ve stálém vzájemném pohybu nebo v klidu. Jestliže je sestavován dynamický model s obecnými počátečními podmínkami, není možno takovou závislost koeficientu tření na vzájemné rychlosti těles použít - závislost $f(\dot{x})$ není funkce, protože pro $\dot{x} = 0$ nemá jednoznačně definovanou hodnotu. Při dynamických simulacích se průběh $f(\dot{x})$ aproximuje vhodnými funkcemi [1], [2], [3]. Příklady jejich možných průběhů jsou na obr.4.



Obr.4: Aproximace suchého tření

Na obr.4a je zobrazena závislost ve tvaru

$$f(\dot{x}) = \begin{cases} \dot{x} < -v_0, & -f_d \\ \dot{x} \geq -v_0 \wedge \dot{x} \leq v_0, & \frac{f_d}{v_0} \cdot \dot{x} \\ \dot{x} > v_0, & f_d \end{cases}$$

"Svislá" část grafu závislosti je nahrazena lineární funkcí se směrnici $\frac{f_d}{v_0}$, kde f_d je dynamický koeficient tření (za pohybu) a v_0 je "prahová" rychlost (pokud je $|\dot{x}| \leq v_0$, považujeme vzájemnou rychlost těles za přibližně nulovou). Rychlost v_0 lze s ohledem na numerické řešení pohybové rovnice nastavit na libovolně malou hodnotu.

Jinou možnost uvádí obr.4b. Závislost $f(\dot{x})$ je ve tvaru

$$f(\dot{x}) = f_d \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \arctg\left(\frac{f_d}{v_0} \cdot \dot{x}\right).$$

Výhodou tohoto tvaru je vyjádření závislosti hladkou spojitou funkcí se definičním oborem \mathcal{R} .

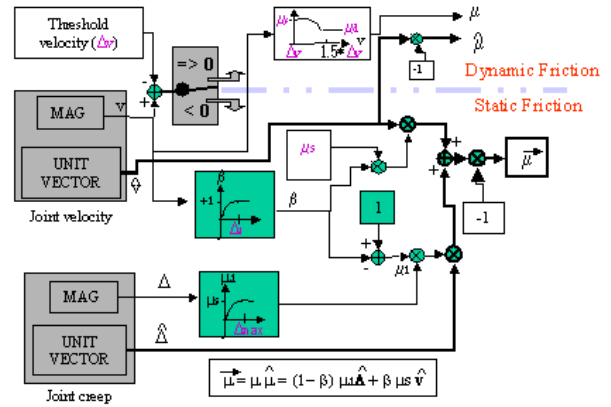
Další možností je užití funkce $f(\dot{x}) = c1 \cdot \tanh(c2 \cdot \dot{x})$, kde $c1$ a $c2$ jsou vhodně zvolené konstanty.

4. MODEL TŘENÍ IMPLEMENTOVANÝ V PROSTŘEDÍ ADAMS

Adams umožňuje definovat třecí síly mezi tělesy ve dvou základních typech úloh. Jsou to:

- a) vazby tuhých těles pomocí standardních jointů (translational, revolute, cylindrical, hooke, universal, spherical)
- b) tření mezi tělesy v kontaktních úlohách

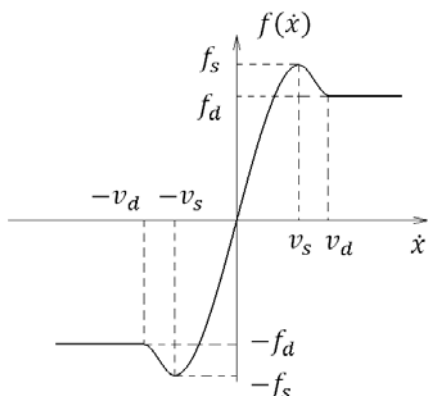
V obou případech je uplatňován stejný průběh závislosti koeficientu tření na relativní rychlosti těles. Jsou rozlišeny dva režimy výpočtu třecích sil - tření za relativního klidu (stiction) a tření za relativního pohybu (dynamic friction). Na obr.5 je schéma popisující algoritmus, podle kterého probíhá vyhodnocování, který režim tření nastává, a výpočet hodnoty koeficientu.



Obr.5: Blokové schéma výpočtu koeficientu tření (převzato z manuálu Adams) [4]

Závislost koeficientu tření na vzájemné rychlosti (obr.6) má tvar

$$f(\dot{x}) = \begin{cases} \dot{x} \leq -v_s, & \text{step}(\dot{x}, -v_d, -f_d, -v_s, -f_s) \\ \dot{x} > -v_s \wedge \dot{x} < v_s, & \text{step}(\dot{x}, -v_s, -f_s, v_s, f_s) \\ \dot{x} \geq v_s, & \text{step}(\dot{x}, v_s, f_s, v_d, f_d) \end{cases}$$

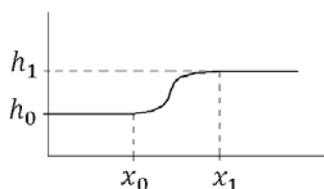


Obr.6: Závislost koeficientu tření na vzájemné rychlosti těles

"Step" je funkce nahrazující jednotkový skok polynomem třetího stupně. Je to funkce tvaru

$$\text{step}(x, x_0, h_0, x_1, h_1) = \begin{cases} x \leq x_0, h_0 \\ x > x_0 \wedge x < x_1, h_0 + a \cdot \Delta^2(3 - 2\Delta), \\ x \geq x_1, h_1 \end{cases}$$

kde $a = h_1 - h_0$ a $\Delta = (x - x_0)/(x_1 - x_0)$ (obr.7).

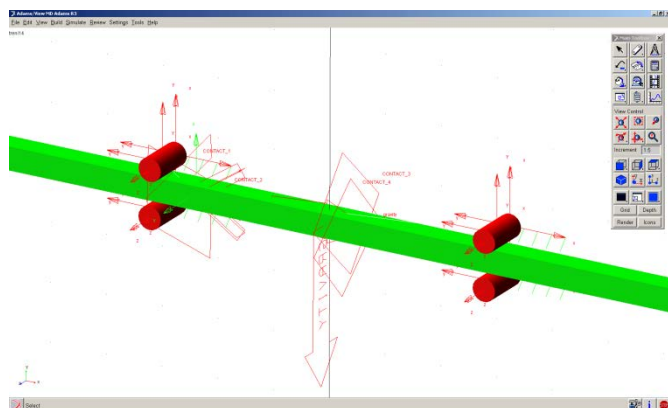


Obr.7: Průběh funkce "step"

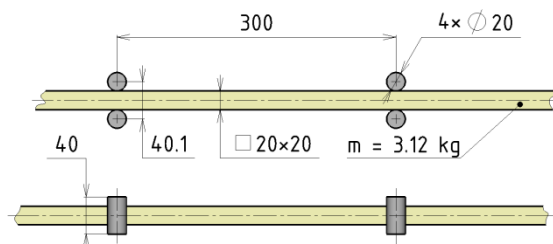
Rychlost v_s je tzv. prahová rychlost (threshold velocity, stiction transition velocity). Jestliže je $|\dot{x}| < v_s$, je vazebná dvojice v režimu statického tření (static friction). Pokud je $|\dot{x}| > v_d$ (friction transition velocity), nastává režim dynamického tření (dynamic friction). Přechod mezi statickým a dynamickým třením ($v_s < |\dot{x}| < v_d$) je řešen pomocí funkce "step" (obr.6).

5. DYNAMICKÝ MODEL V PROSTŘEDÍ ADAMS

Simulace v prostředí Adams byla provedena jako kontaktní úloha s ideálně tuhými tělesy. Tyč čtvercového průřezu je vložena mezi čtyři válcové podpory, které jsou pevně spojeny s rámem (background) (obr.8). Mezi tyčí a podporami je modelována vůle 0.1mm – rozměrový náčrt je na obr.9.



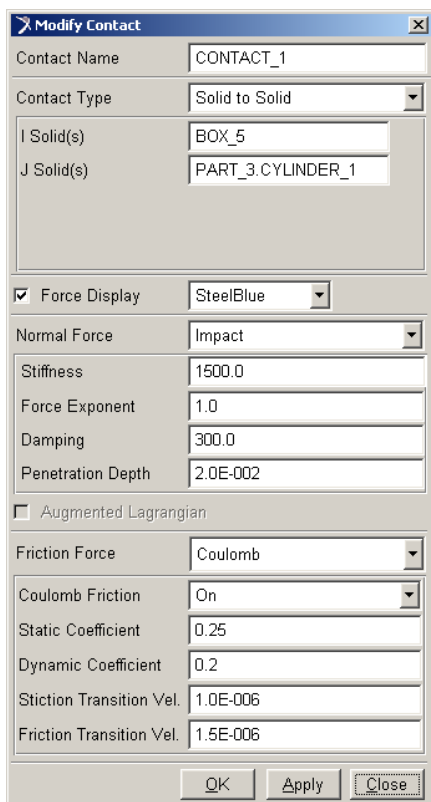
Obr.8: Dynamický model v prostředí Adams



Obr.9: Rozměrový náčrt 3D modelu

Kontakty mezi tyčí a podporami jsou modelovány jako solid to solid. Pro výpočet třecích sil je použit model Coulomb friction implementovaný v prostředí Adams. Další možností by bylo použití vlastního modelu tření volbou User defined. Následující tabulka uvádí parametry kontaktů a tření.

	A	B	
Stiffness	1500	1500	[N·mm ⁻¹]
Force exponent	1.0	1.0	[-]
Damping	300	300	[N·mm ⁻¹ ·s]
Penetration depth	0.02	0.02	[mm]
Force friction	Coulomb	Coulomb	
Coulomb friction	ON	ON	
Static coefficient	0.25	0.35	[-]
Dynamic coefficient	0.2	0.3	[-]
Stiction Transition Velocity	v_s	1e-6	[mm · s ⁻¹]
Friction Transition Velocity	v_f	1.5e-6	[mm · s ⁻¹]



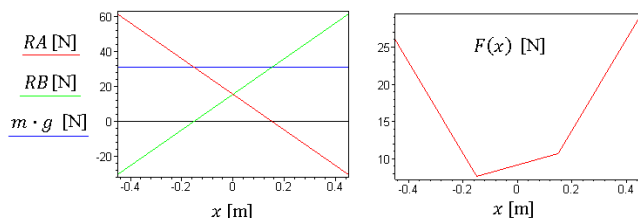
Obr.10: Dialogové okno pro nastavení kontaktu a tření

6. STANOVENÍ VELIKOSTI AKČNÍ SÍLY

Pohyb tyče je podmíněn tím, že akční síla F musí překonat třecí síly v posuvných vazbách (pro výpočet F se předpokládá $\dot{x} = 0$). Poloha tyče pro výpočet síly F se předpokládá v intervalu $(-x_0, x_0)$. Vztah pro sílu F jako funkci polohy tyče pak má tvar

$$F(x) = |RA| \cdot f_{SA} + |RB| \cdot f_{SB} = \\ = \left| m \cdot g \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{B} \right] \right| \cdot f_{SA} + \left| m \cdot g \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{x}{B} \right] \right| \cdot f_{SB} ,$$

přičemž x_0 je počáteční poloha tyče ($x(0) = -x_0$) (obr.1). Velikost síly je pak určena jako $\max(F(x))$, $x \in (-x_0, x_0)$ (obr.12).

Obr.11: Reakce vazeb a minimální akční síla jako funkce polohy tyče (hodnoty pro počáteční polohu $x_0 = -1,5 B$)

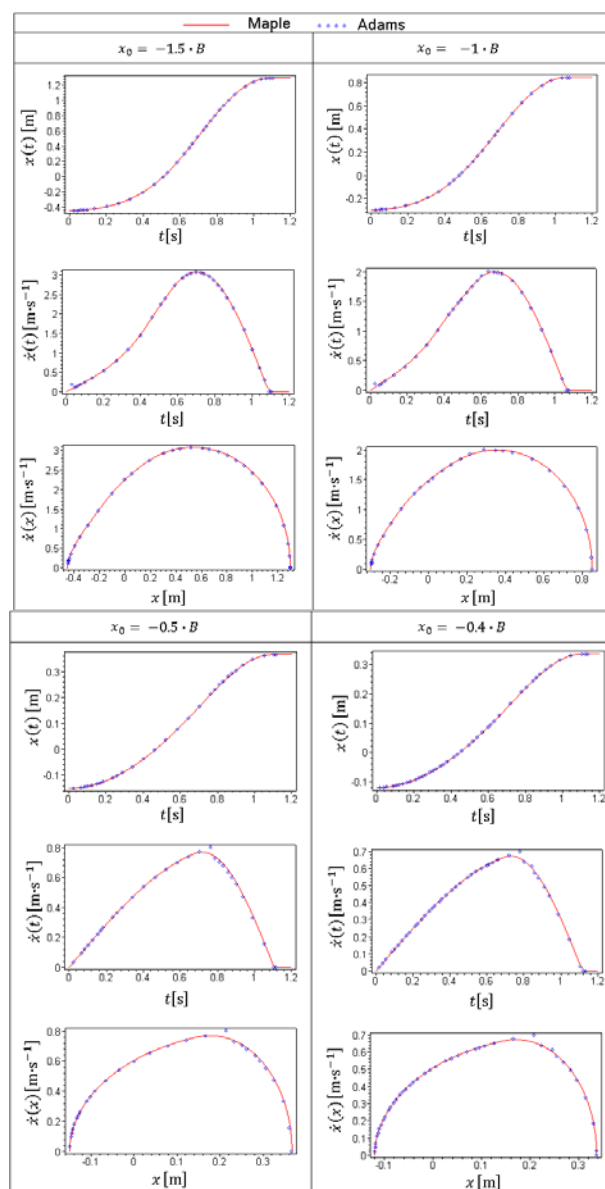
Simulace byla provedena pro čtyři případy počátečních podmínek. Následující tabulka uvádí jejich hodnoty.

	x_0	F	$\dot{x}(0)$
1	$-1.5 \cdot B = -450 \text{ mm}$	29.08 N	0
2	$-1 \cdot B = -300 \text{ mm}$	19.9 N	0
3	$-0.5 \cdot B = -150 \text{ mm}$	10.72 N	0

4	$-0.4 \cdot B = -120 \text{ mm}$	10.41 N	0
---	----------------------------------	---------	---

7. ZÁVĚR

Jako výstup ze simulace v prostředí Adams byly vygenerovány textové soubory, obsahující funkční hodnoty závislosti $x(t)$, $\dot{x}(t)$ a $\dot{x}(x)$. Tyto hodnoty byly vyneseny do společných grafů s numerickým řešením v prostředí Maple.



Zdroje

- PERSSON, B. Sliding Friction: Physical Principles and Applications. 2. vydání. Springer Science & Business Media, 2013. ISBN 9783662042830.
- KRAGELSKY, I. V., DOBYCHIN, M. N., KOMBALOV, V. S. Friction and Wear: Calculation Methods. Elsevier, 2013. ISBN 9781483145501.
- JANÍK, J. Fyzika tření. Bakalářská práce. Masarykova univerzita Brno, 2008.
- MSC ADAMS documentation. <http://www.mscsoftware.com/product/adams>