

Výučba fyziky a metrológie pomocou merania modulu pružnosti v šmyku torzným kyvadlom

Jozef Leja¹
Jan Rybář²
Stanislav Ďuriš³
Peter Onderčo⁴
Andrej Smetánka⁵

¹ Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita; Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava; jozef.leja@stuba.sk

² Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita; Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava; jan.rybar@stuba.sk

³ Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita; Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava; stanislav.duris@stuba.sk

⁴ Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita; Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava; peter.onderco@stuba.sk

⁵ Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita; Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava; andrej.smetanka@stuba.sk

Grant: KEGA 024STU-4/2023; KEGA 016STU-4/2025; APVV-21-0195; APVV-21-0216

Názov grantu: Budovanie laboratória medicínskej metrológie; Podpora adaptácie študentov na vysokoškolské vzdelávanie technického smeru v predmetoch z oblasti prírodných vied; Výskum možnosti digitálnej transformácie kontinuálnych dopravných systémov; Pokročilé matematické metódy pre meranie a metrológiu

Oborové zamčrení: AM – Pedagogika a školství

© GRANT Journal, MAGNANIMITAS Assn.

Abstrakt Príspevok sa venuje výučbe fyziky a metrológie na Strojníckej fakulte Slovenskej technickej univerzity v Bratislave. Dôležitú časť výučby tvoria laboratórne cvičenia, pretože umožňujú lepšie pochopiť fyzikálne zákony, ako sa aj oboznámiť so základmi metrológie. Príkladom je meranie modulu pružnosti v šmyku pomocou torzného kyvadla. V príspevku je vysvetlená fyzikálna teória, odvodený model merania aj výpočet neistoty merania.

Kľúčová slova Fyzika, metrológia, modul pružnosti v šmyku, torzné kyvadlo

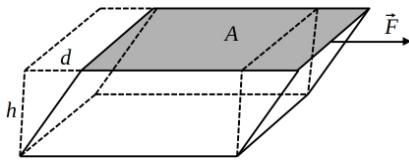
1. ÚVOD

Fyzika je fundamenálna prírodná veda, ktorej znalosť je nevyhnutná pre štúdium techniky, pretože matematika a prírodné vedy poskytujú princípy, na ktorých je založená celá moderná technika. Pochopenie zákonov fyziky je pre technikov nevyhnutné aj pri navrhovaní a vývoji nových inovatívnych technológií. Preto sú kurzy fyziky súčasťou učebných osnov na všetkých technických univerzitách na celom svete. Aj všetky fakulty Slovenskej technickej univerzity v Bratislave majú vo svojich štúdiálnych plánoch kurzy fyziky. Kurz fyziky na Strojníckej fakulte pozostáva z dvoch povinných predmetov Technická fyzika I a Technická fyzika II a troch výberových predmetov Seminár z fyziky I, Seminár z fyziky II a Seminár z fyziky III. Keďže fakulta je orientovaná na strojnú inžinierstvo, obsah kurzu je zameraný najmä na klasickú mechaniku. Preto celý obsah predmetu Technická fyzika I tvorí mechanika hmotného bodu a tuhého telesa [1, 2]. Obsah predmetu Technická fyzika II tvoria ďalšie časti klasickej fyziky, ako termodynamika, molekulová fyzika, elektrina, magnetizmus, akustika a optika. Štruktúra kurzu pozostáva z prednášok doplnených o laboratórne cvičenia a semináre. Laboratórne

cvičenia [3] tvoria dôležitú súčasť kurzu, pretože umožňujú praktickú aplikáciu teoretických poznatkov. V rámci predmetu Technická fyzika I študenti absolvujú laboratórne cvičenia zamerané na meranie hustoty a viskozity kvapalín, momentu zotrvačnosti telesa, modulu pružnosti materiálu, gravitačného zrýchlenia, overenie Steinerovej vety a Hookovho zákona, experimenty s fyzikálnym, torzným a reverzným kyvadlom. V tomto príspevku sa podrobne venujeme meraniu modulu pružnosti v šmyku pomocou torzného kyvadla. Cieľom je ukázať, že aj pomocou jednoduchého a dostupného vybavenia je možné uskutočniť experiment, ktorý študentom umožňuje lepšie pochopiť zákony fyziky a pojmy z metrológie. Toto laboratórne cvičenie je komplexným meraním, pri ktorom si študenti precvičia základy mechaniky tuhých telies, experimentálne zručnosti aj spracovanie nameraných hodnôt a zároveň podporuje samostatné myslenie pri analýze zdrojov neistoty a interpretácii výsledkov. Torzné kyvadlo je tuhé teleso s osovou symetriou zavesené na zvislom drôte tak, že jeho os symetrie je totožná s osou drôtu. Periodický pohyb telesa je spôsobený krútiacim momentom, ktorý vzniká pri deformácii drôtu. Torzné kyvadlo je univerzálnym nástrojom vo výučbe aj experimentálnej fyzike [4]. Služí ako dôležitý nástroj na štúdium mechaniky tuhých telies a vlastností materiálov a zároveň poskytuje praktické využitie v technike a meraní.

2. MERANIE MODULU PRUŽNOSTI POMOCOU TORZNÉHO KYVADLA

V prípade pružných materiálov platí pri malej deformácii Hookov zákon [5], podľa ktorého je deformácia materiálu úmerná deformujúcej sile. Ak na malý hranol materiálu pôsobí tangenciálna sila cez jeho hornú stranu, zatiaľ čo jeho spodná strana je pevná, dochádza k deformácii v šmyku (obr. 1).



Obr.1: Deformácia malého hranola.

Vzťah medzi tangenciálnym napätím a relatívnym posunutím opisuje Hookov zákon

$$\tau = G\gamma,$$

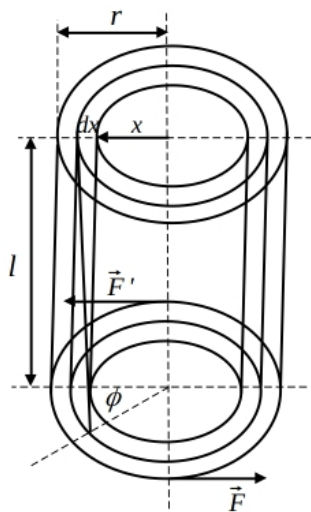
kde G označuje materiálovú konštantu modul pružnosti v šmyku, τ reprezentuje tangenciálne napätie, definované ako pomer tangenciálnej sily F k ploche A , cez ktorú pôsobí

$$\tau = \frac{F}{A},$$

γ je relatívne posunutie, ktoré udáva pomer posunu hornej strany d k výške hranola h

$$\gamma = \frac{d}{h}.$$

Hookov zákon možno aplikovať aj na deformáciu drôtu torzného kyvadla (obr. 2), ktorého horný koniec je pevný a na dolný koniec pôsobí dvojica síl. Ak predpokladáme, že drôt má tvar valca s polomerom r , môžeme ho rozdeliť na valcové vrstvy s polomerom x a hrúbkou dx . Keď dvojica síl stočí spodnú základňu, jednotlivé vrstvy sa vzájomne pootočia a šmýkajú sa po sebe, preto dochádza k deformácii v šmyku.



Obr. 2: Deformácia drôtu torzného kyvadla.

Pri stočení o uhol ϕ sa spodný koniec vrstvy posunie o vzdialenosť

$$d = \phi x,$$

preto relatívne posunutie vrstvy bude

$$\gamma = \frac{d}{l} = \frac{\phi x}{l},$$

kde l označuje dĺžku drôtu. Hookov zákon potom nadobudne tvar

$$\tau = G\gamma = G \frac{\phi x}{l}.$$

Element plochy je možné zapísať ako

$$dA = 2\pi x dx,$$

element sily je možné vyjadriť pomocou Hookovho zákona

$$dF = \tau dA = G \frac{\phi x}{l} 2\pi x dx,$$

element krútiaceho momentu sily bude

$$dM = x dF = G \frac{\phi x^3}{l} 2\pi dx.$$

Celkový krútiaci moment sily je možné vypočítať integrovaním

$$M = \int dM = \int_0^r G \frac{\phi x^3}{l} 2\pi dx = \frac{\pi G r^4}{2l} \phi,$$

výsledok sa dá zapísať v tvare

$$M = M_0 \phi,$$

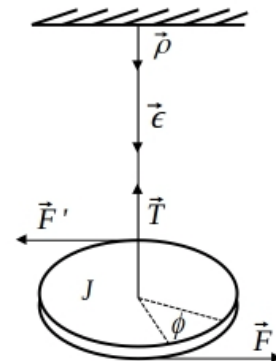
v ktorom M_0 reprezentuje direkčný moment torzie

$$M_0 = \frac{\pi G r^4}{2l} = \frac{\pi G d^4}{32l},$$

kde d označuje priemer drôtu. Východiskom pre opis pohybu torzného kyvadla (obr. 3) je pohybová rovnica rotujúceho tuhého telesa [4], ktorá má tvar

$$\vec{M} = J \vec{\epsilon},$$

kde J je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania a $\vec{\epsilon}$ je uhlové zrýchlenie rotujúceho telesa.



Obr. 3: Pohyb torzného kyvadla.

Pomocou jednotkového vektora $\vec{\rho}$ možno pohybovú rovnicu zapísať v tvare

$$-M_0 \vec{\rho} = J \epsilon \vec{\rho},$$

ktorý je možné transformovať na diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$-M_0 \phi \vec{\rho} = J \frac{d^2 \phi}{dt^2} \vec{\rho}.$$

Z vektorovej rovnice vyplýva skalárna rovnica

$$-\frac{M_0}{J} \phi = \frac{d^2 \phi}{dt^2},$$

ktorá má po zavedení uhlovej frekvencie

$$\omega = \sqrt{\frac{M_0}{J}},$$

podobu harmonickej rovnice

$$-\omega^2 \phi = \frac{d^2 \phi}{dt^2}.$$

Riešením tejto rovnice je harmonická funkcia

$$\phi = \phi_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

kde ϕ_0 je amplitúda a α je fázová konštanta harmonického pohybu.

Periódou pohybu bude

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{32lJ}{\pi G d^4}},$$

z tohto vzťahu možno vyjadriť modul pružnosti v šmyku

$$G = \frac{16\pi lJ}{d^4 T^2}.$$

Vložením momentu zotrvačnosti disku [6] s hmotnosťou m a priemerom D

$$J = \frac{mD^2}{8},$$

je odvodený konečný vzorec pre modul pružnosti v šmyku, ktorý slúži ako model merania

$$G = \frac{16\pi l m D^2}{d^4 T^2}.$$

3. NEISTOTA MERANIA

Keďže modul pružnosti v šmyku je nepriamo meraná veličina, na vyjadrenie jeho neistoty je možné použiť Gaussov zákon šírenia neistôt [7]. Ak je nepriamo meraná veličina vo funkčnom vzťahu s priamo meranými veličinami

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

pričom priamo merané veličiny nezávisia od seba, bude kombinovaná štandardná neistota nepriamo meranej veličiny

$$u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 u_{x_n}^2}.$$

V prípade merania modulu pružnosti v šmyku (23) bude výsledná neistota merania

$$u_G = \sqrt{\frac{\partial G}{\partial l} u_l^2 + \frac{\partial G}{\partial d} u_d^2 + \frac{\partial G}{\partial m} u_m^2 + \frac{\partial G}{\partial D} u_D^2 + \frac{\partial G}{\partial T} u_T^2}$$

Neistoty priamo meraných veličín, teda dĺžky drôtu (u_l), priemeru drôtu (u_d), hmotnosti disku (u_m), priemeru disku (u_D) a periódy pohybu (u_T) sú určené z neistôt typu A a typu B. Koeficienty citlivosti ovplyvňujúcich veličín majú tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial l} &= \frac{16\pi m D^2}{d^4 T^2}, \\ \frac{\partial G}{\partial d} &= \frac{-64\pi l m D^2}{d^5 T^2}, \\ \frac{\partial G}{\partial m} &= \frac{16\pi l D^2}{d^4 T^2}, \\ \frac{\partial G}{\partial D} &= \frac{32\pi l m D}{d^4 T^2}, \\ \frac{\partial G}{\partial T} &= \frac{-32\pi m D^2}{d^4 T^3}. \end{aligned}$$

Ak má model merania tvar len násobenia alebo delenia mocnín vstupných veličín

$$y = \frac{a^k b^l}{c^m d^n},$$

podstatne jednoduchšie je vyjadriť relatívnu neistotu merania

$$\frac{u_y}{y} = \sqrt{\left(k \frac{u_a}{a}\right)^2 + \left(l \frac{u_b}{b}\right)^2 + \left(m \frac{u_c}{c}\right)^2 + \left(n \frac{u_d}{d}\right)^2},$$

výsledkom je jednoduchý vzorec pre relatívnu neistotu modulu pružnosti v šmyku

$$\frac{u_G}{G} = \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + 16 \left(\frac{u_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{u_m}{m}\right)^2 + 4 \left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + 4 \left(\frac{u_T}{T}\right)^2}.$$

4. PRIEBEH MERANIA

Laboratórne cvičenia prebiehajú v laboratóriu technickej fyziky podľa harmonogramu, ktorý každému študentovi určuje, ktorú laboratórnu úlohu bude merať v danom týždni semestra. Harmonogram je zostavený s prihliadnutím na materiálne zabezpečenie laboratórnych cvičení tak, aby každý študent do konca semestra odmeral všetky laboratórne úlohy. Z každej laboratórnej

úlohy študenti vypracujú referát s nameranými hodnotami, výpočtami a vyhodnotením merania. Pri meraní modulu pružnosti pomocou torzného kyvadla študenti používajú len základné meracie prístroje, dĺžku drôtu (l) merajú oceľovým meradlom, priemer drôtu (d) merajú mikrometrom, hmotnosť disku (m) merajú laboratórnymi váhami, priemer disku (D) merajú posuvným meradlom a perióda kyvadla (T) merajú stopkami. Priebeh laboratórneho cvičenia ilustruje obr. 4, modul pružnosti pomocou torzného kyvadla meria študent na pravej strane obrázku.



Obr. 4: Priebeh laboratórneho cvičenia. Foto: Jozef Leja.

5. ZÁVER

Prezentovaná laboratórna úloha potvrdzuje význam fyzikálneho vzdelávania ako neoddeliteľnej súčasti štúdia strojného inžinierstva. Meranie modulu pružnosti pomocou torzného kyvadla predstavuje vhodný príklad prepojenia teórie s praxou, ktorý umožňuje študentom hlbšie porozumieť základom mechaniky tuhých telies a zároveň rozvíjať experimentálne a metrologické zručnosti. Takéto laboratórne cvičenia prispievajú k lepšiemu pochopeniu fyzikálnych zákonitostí a podporujú aktívne učenie založené na skúsenosti.

Zdroje

1. DILLINGER, J., BENCO, P., KALUŽNÁ, M. *Fyzika I*. Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2001, 186 s. ISBN 80-227-1531-X
2. MORHÁČOVÁ, E., LEJA, J., LICHARDOVÁ, Z. *Technical Physics I*. Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2008, 78 s. ISBN 978-80-227-2823-2.
3. BENCO, P. A KOL. *Technická fyzika – Návod na laboratórne cvičenia*. Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2003, 241 s. ISBN 80-227-1869-6.
4. HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. *Fundamentals of Physics*. 10th ed., Hoboken: John Wiley & Sons, 2014, 1232 s. ISBN 978-1-118-23072-5.
5. SERWAY, R., JEWETT, J. *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*. 9th ed., Boston: Brooks Cole, 2014. 1616 s. ISBN 978-1-133-95405-7.
6. TIPLER, P., A., MOSCA, G. *Physics for Scientists and Engineers*, 6th ed. New York: Freeman and Company, 2008. 1172 s. ISBN 987-0-7167-8964-2.
7. RAGHAVENDRA, N., V., KRISHNAMURTHY, L. *Engineering Metrology and Measurements*, New Delhi: Oxford University Press, 2013. 676 s. ISBN 978-0-19-808549-2.